ECON2130: EKSAMEN 2011 VÅR - UTSATT PRØVE 1

Oppgave 1

Et bilverksted skal kontrollere og, om nødvendig, justere frontlysene til to biler som har kommet inn til kontroll. La for en enkelt bil "0" betegne begivenheten at ingen av frontlysene trenger justering, "H" at høyre frontlys trenger justering, "V" at venstre frontlys trenger justering og "2" at begge frontlysene trenger justering.

A. De to bilene som kommer inn til kontroll kaller vi "bil 1" og "bil 2" henholdsvis. Tilstanden for bil 1 og bil 2 beskrives som et utfall, $e = (r, s)$, der r er tilstanden for bil 1 og s tilstanden for bil 2, og der både r og s er et av kjennetegnene 0, H, V, 2. For eksempel utfallet $(0, V)$ betyr at bil 1 ikke trenger å justere noen av frontlysene, mens bil 2 trenger å justere venstre frontlys.

(**i**) Skriv opp en liste eller tabell over alle utfallene i utfallsrommet.

(**ii**) La A betegne begivenheten at en av bilene trenger justering mens den andre ikke gjør det, og B begivenheten at begge bilene har samme tilstand (for eksempel at begge er 0 eller at begge er H osv). Beskriv begivenhetene, A, B, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ som delmengder av utfallsrommet.

B. Anta for en vilkårlig bil som kommer inn til kontroll, at de fire tilstandene, 0, H, V, 2, har følgende sannsynligheter: $P(0) = 0.1$, $P(H) = 0.2$, $P(V) = 0.2$, $P(2) = 0.5$. Anta dessuten at tilstanden for forskjellige biler er uavhengig av hverandre.

(**i**) Bruk dette til å angi sannsynligheter for alle enkeltutfallene i utvalgsrommet i punkt A.
(**ii**) Finn sannsynlighetene for de fire begivenhetene, A, B, $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ fra punkt A(**ii**).

C. (**i**) Anta vi vet at minst ett av frontlysene på bil 1 må justeres. Hva er da sannsynligheten for at begge frontlysene på bil 1 må justeres?
(ii) Anta vi vet at *begge* bilene må få justert minst ett av frontlysene sine. Hva er da sannsynligheten for at begge frontlysene på bil 1 må justeres?

D. La for en vilkårlig bil som kommer inn til kontroll X være antall frontlys som trenger justering. X er således en stokastisk variabel som kan anta en av verdiene, 0, 1, 2.

(i) Vis at $E(X) = 1.4$ og $\text{var}(X) = 0.44$ basert på sannsynlighetene angitt i punkt **B**.
(ii) Finn sannsynligheten tilnærmet for at i alt minst 150 frontlys må justeres blant 100 biler som kommer inn til kontroll. [**Hint:** Bruk sentralgrenseteoremet.]

E. Anta, for enkelthets skyld, at det tar 4 minutter å kontrollere frontlysene på en vilkårlig bil (inklusivt flytting av bilen) og 8 minutter å justere hvert enkelt frontlys. For eksempel vil det med disse tidsanslagene i alt ta 20 minutter å behandle en (vilkårlig) bil der begge frontlysene må justeres. La T betegne total behandlingstid (i minutter) for til sammen 100 biler.

(i) Bestem et (tilnærmet) 95% variasjonsintervall for T (dvs. bestem konstanter, c_1 og c_2, slik at $P(c_1 \le T \le c_2) \approx 0.95$).

(ii) Intervallet i **(i)** er gitt i minutter. Overfør intervallet til timer.

Oppgave 2

Situasjonen er fortsatt som i oppgave 1, men vi forutsetter ikke lenger at fordelingen til X i oppgave 1**D** er kjent. La p være sannsynligheten for at en vilkårlig bil som kommer inn til kontroll må justere minst et av frontlysene. I oppgave 1 regnet vi som om p var kjent lik 0.9, mens vi i denne oppgaven antar at p er ukjent. For $n = 100$ biler som kommer inn til kontroll, la V betegne antall biler som må få justert minst ett av frontlysene. Anta V er binomisk fordelt, $V \sim \text{bin}(100, p)$.

A. **(i)** Drøft kort om den binomiske modellen kan være en en rimelig modell for V.
(ii) Forklar hvorfor $\hat{p} = V/100$ er en forventningsrett estimator for p med standardfeil $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.
(iii) Hvorfor er standardfeilen til $\hat{p}$ det samme som standardavviket for $\hat{p}$?

B. **(i)** Sett opp formelen for et (tilnærmet) 99% konfidensintervall for p basert på V.
(ii) I et konkret datamateriale måtte 84 av 100 biler få justert ett eller begge frontlysene. Beregn konfidensintervallet for p basert på disse dataene.

C. Det har oppstått en mistanke om at verdien $p = 0.9$, som framgår av modellen brukt i oppgave 1, er satt for høyt. Man ønsker således å teste $H_0 : p \geq 0.9$ mot $H_1 : p < 0.9$ basert på antall (V) som må få justert minst ett av frontlysene blant $n = 100$ biler som kommer inn til kontroll. Følgende test blir foreslått:

Forkast H_0 hvis $V < 85$ (eller, om man vil, hvis $V \leq 84$).

(**i**) Beregn testens signifikansnivå tilnærmet. Bruk heltallskorreksjon.
[**Hint:** Vanligvis bestemmes den kritiske verdien etter at sgnifikansnivået er valgt. Her er omvendt den kritiske verdien (85) gitt, og du skal finne signifikansnivået som svarer til denne.]

(**ii**) Hvilket nivå ville du fått uten heltallskorreksjon?

D. (**i**) Beregn sannsynligheten (tilnærmet) for å forkaste H_0 med testen i punkt **C**, hvis den sanne verdien av p er 0.87.
(ii) Hva blir sannsynligheten for feil av type I og sannsynligheten for feil av type II hvis den sanne verdien av p er 0.87?